

Subiectul 1 la Clasa VIII

1.

a) Determinați perechile de numere întregi nenule (x,y) care satisfac relația:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2 \cdot \left(\frac{1}{x \cdot y} - 1 \right)$$

(S.E.11323 adaptare)

b) Aratați ca:

$$\frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} + \frac{\sqrt{110}}{21} + \frac{\sqrt{132}}{23} < 3$$

(Mate 2000+11/12)

Problemele au fost propuse de:

Prof. Boga Ovidiu Liceul Tehnologic Targul Lapus

Prof. Nagy Anamaria Scoala "Lucian Blaga" Baia Mare

Prof. Zetea Bogdan Scoala cu clasele I-VIII "George Cosbuc" Sighetu Marmatiei

Barem de corectare

$$1. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2 \cdot \left(\frac{1}{x \cdot y} - 1 \right) \text{ cum } x, y \neq 0$$

$$\frac{y-x}{x \cdot y} = 2 \cdot \left(\frac{1-x \cdot y}{x \cdot y} \right) \quad (1p)$$

$$y-x+2xy=2$$

$$x(2y-1)=2-y$$

$$x = \frac{2-y}{2y-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2y-1 \mid 2-y \Rightarrow 2y-1 \mid y-2 \Rightarrow 2y-1 \mid 3 \Rightarrow$$

$$2y-1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \quad (2p)$$

$$y \in \{-1, 0, 1, 2\} \quad y=0 \text{ nu convine}$$

$$x \in \{-1, 1, 0\} \quad x=0 \text{ nu convine}$$

$$(x,y) \in \{(-1, -1), (1,1)\} \quad (1p)$$

b)
$$\text{Stiim ca } m_a \geq m_g \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 6} < \frac{5+6}{2} \quad \frac{\sqrt{(5 \cdot 6)}}{5+6} < \frac{1}{2}$$

(1p)

.....

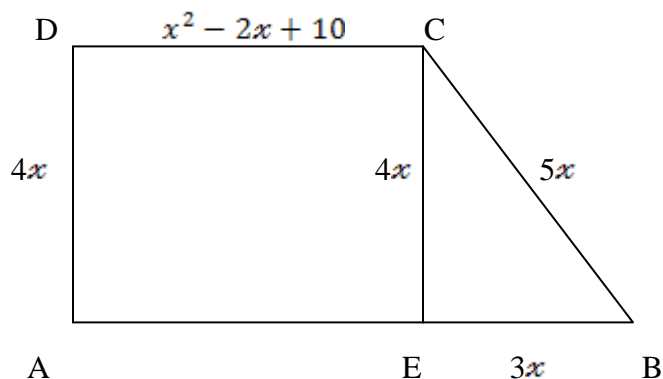
$$\sqrt{11 \cdot 12} < \frac{11+12}{2} \quad \frac{\sqrt{(11 \cdot 12)}}{11+12} < \frac{1}{2}$$

Suma $< 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{suma} < 3$ (2p)

Se consideră trapezul dreptunghic ABCD cu $m(\hat{A})=m(\hat{D})=90^\circ$ și lungimile laturilor $AB=4$, $BC=5x$, $CD=x^2 - 2x + 10$, $AD=4x$, unde $x > 0$ este număr real. Determinați valorile posibile ale lui x .

E 14237 G.M.7-8-9/2011

Barem de corectare I

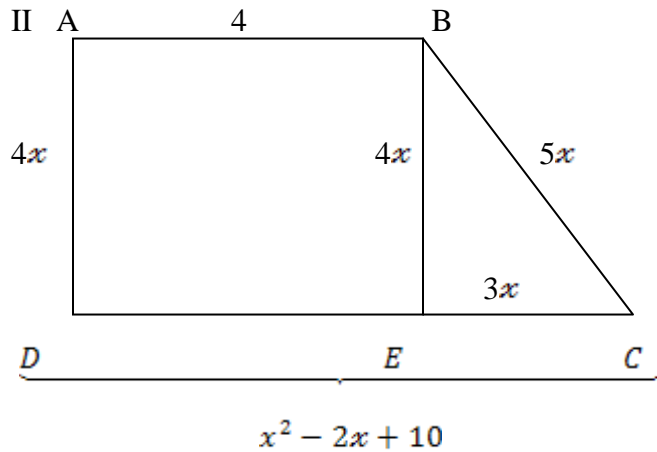


Construim $CE=h \Rightarrow EB=3x \dots$ (Th Pitagora)..... 1p

$$AB = 3x + x^2 - 2x + 10 = 4$$

$$x^2 + x + 10 = 4 \Rightarrow x^2 + x + 6 = 0 \dots \dots \dots 1p$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{23}{4} \quad (F) \Rightarrow \nexists x \in \mathfrak{R} \Rightarrow AB < CD \dots \dots 1p$$



Construim $BE \perp CD$

$$CD = 4 + 3x \Rightarrow 4 + 3x = x^2 - 2x + 10 \dots\dots\dots 1p$$

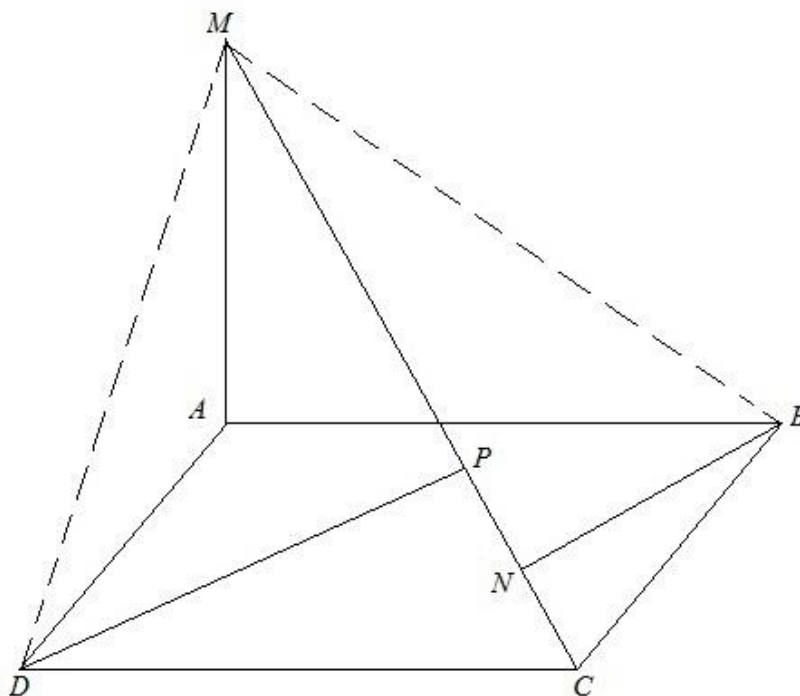
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$x = 2; x = 3 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3

În vârful A al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara pe planul (BCD) pe care se considera punctul M , iar N și P sunt picioarele perpendicularelor din punctele B și D pe dreapta MC .

Știind că $AB = 18\sqrt{2} \text{ cm}$, $BC = 12\sqrt{3} \text{ cm}$ și $PN = 6 \text{ cm}$, calculați lungimea segmentului $[MC]$.



Soluție:

..... 1 punct

Construim MD și conform T. 3 $\perp \Rightarrow MD \perp DC$ 1 punct

In $\Delta MDC, m \sphericalangle D = 90^\circ$ si conform T.C. $\Rightarrow DC^2 = PC \cdot MC \Rightarrow$

$$\Rightarrow MC = \frac{648}{PC} \quad (1) \quad \text{..... 1 punct}$$

Construim MB și conform T. 3 $\perp \Rightarrow MB \perp BC$ 1 punct

In $\Delta MBC, m \sphericalangle B = 90^\circ$ si conform T.C. $\Rightarrow BC^2 = NC \cdot MC \Rightarrow$

$$\Rightarrow MC = \frac{432}{NC} \quad (2) \quad \text{..... 1 punct}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{648}{NC+6} = \frac{432}{NC} \Rightarrow \text{..... 1 punct}$$

$$\Rightarrow NC = 12 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MC = \frac{432}{12} \quad \text{..... 1 punct}$$

$$\Rightarrow MC = 36 \text{ cm}$$